

12/5/17

ΦΥΛΛΑΔΙΟ #6

Άσκ 3

Να ορίσετε μια ισομετρία από το $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ όπου

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ κανονικό εσωτερικό γινόμενο στον Χ.Ε.Γ

$(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ με εσωτ. γινόμενο $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$

Λύση

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = \dim \mathbb{R}_2[x] = 3$$

Βήμα 1° Ο $\mathbb{R}^3$ έχει ορθοκανονική βάση $e = (e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1))$

Βήμα 2° Βρίσκουμε ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_2[x]$ με
αλγόριθμο Gram-Schmidt. Θέτουμε $g_1 = 1, g_2 = x, g_3 = x^2$
Τότε g_1, g_2, g_3 βάση του $\mathbb{R}_2[x]$

$$\text{Θέτουμε } h_1 = g_1, \quad h_2 = g_2 - \frac{\langle g_2, h_1 \rangle}{\langle h_1, h_1 \rangle} h_1$$

$$h_3 = g_3 - \frac{\langle g_3, h_1 \rangle}{\langle h_1, h_1 \rangle} h_1 - \frac{\langle g_3, h_2 \rangle}{\langle h_2, h_2 \rangle} h_2$$

$$w_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|}, \quad w_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|}, \quad w_3 = \frac{h_3}{\|h_3\|}$$

Έχουμε $\langle h_1, h_1 \rangle = \langle g_1, g_1 \rangle = \int_0^1 (g_1(x))^2 dx = \int_0^1 dx = [x]_0^1 = 1$

$\langle g_2, h_1 \rangle = \int_0^1 g_2(x) h_1(x) dx = \int_0^1 x \cdot 1 dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$

Άρα $h_2 = x - \frac{1}{2} \cdot 1 = x - \frac{1}{2}$

Ομοίως Μετά ως πρότυπος $h_3 = x^2 - x - \frac{1}{6}$

Επίσης $\langle h_2, h_2 \rangle = \frac{1}{12}$ άρα $\|h_2\| = \frac{1}{\sqrt{12}}$ Επίσης $\|h_3\| = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{60}}$

Τελικά $w_1 = 1$, $w_2 = \sqrt{12} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$, $w_3 = \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{7}} \left(x^2 - x - \frac{1}{6}\right)$

Βήμα 3° Από την θεωρία η ανεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$

με $T(ae_1 + be_2 + ce_3) = aw_1 + bw_2 + cw_3$ είναι γραμμική ισομετρία. Ο τύπος της T είναι:

$$T(a, b, c) = T(ae_1 + be_2 + ce_3) = aw_1 + bw_2 + cw_3 = \left(a - \frac{\sqrt{12}}{2}b - \frac{\sqrt{60}}{6\sqrt{7}}c\right) + \left(\sqrt{12}b - \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{7}}c\right)x + \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{7}}c \cdot x^2 \text{ για } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6#

Ασκ 2 $\langle, \rangle: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 4x_1y_1 + 2x_2y_2 + 8x_3y_3$

α) Δείξε ότι $\langle, \rangle$ έστω γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$

β) Δείξε ότι η γραμμική $T: (\mathbb{R}^3, \langle, \rangle_{can}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$

όπου $\langle, \rangle_{can} = \text{κανονικό έστω γινόμενο στο } \mathbb{R}^3$ είναι

γραμμική ισομετρία με $T\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{z}{2\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{z}{2\sqrt{2}}\right)$

ΛΥΣΗ α) Κατά τα γνωστά

β) Έστω $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ θα δ.ο

$\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle_{can} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

Παίχματι

$$\langle T(x), T(y) \rangle = \left\langle \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_3}{2\sqrt{2}} \right), \left(\frac{y_1}{2}, \frac{y_2}{\sqrt{2}}, \frac{y_3}{2\sqrt{2}} \right) \right\rangle$$

$$= 4 \left(\frac{x_1}{2} \right) \left(\frac{y_1}{2} \right) + 2 \left(\frac{x_2}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{y_2}{\sqrt{2}} \right) + 8 \left(\frac{x_3}{2\sqrt{2}} \right) \left(\frac{y_3}{2\sqrt{2}} \right) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

T 1-1 προφανές

T επί Προφανές, γιατί αν $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, $(y_1, y_2, y_3) = T(2y_1, \sqrt{2}y_2, 2\sqrt{2}y_3)$

Αν $T(V, \langle \rangle) \rightarrow (W, \langle \rangle)$ γραμμική και $\langle T(u_1), T(u_2) \rangle' = \langle u_1, u_2 \rangle \otimes$ για κάθε $u_1, u_2 \in V$, τότε T 1-1

Απόδ

Έστω T όχι 1-1. Άρα $\ker T \neq \{0\}$. Άρα υπάρχει $u \in V$ μη μηδενικό με $T(u) = 0_W$. Άρα η (*) δίνει (για $u_2 = u$) $0_R = \langle T(u), T(u) \rangle' = \langle u, u \rangle$ αντίφαση αφού $u \neq 0$
 $\Rightarrow \langle u, u \rangle \neq 0_R$ αφού $\langle \rangle$ θετικά ορισμένο

Αν επιπλέον V, W πεπερ διαστάσεις με $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} W$
απο Γραμμ 1, T 1-1 $\Rightarrow$ T επί

Άρα συνθήκη (*) $\Rightarrow$ T γραμμική ισομετρία

~0

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Υποθέτουμε $V \cong \mathbb{R}^n$ πεπερ διαστάσεις

W_1, W_2 υπόχωροι του V , $T|_V \rightarrow V'$ γραμμική.

Υποθέτουμε $V = W_1 \oplus W_2$ (*) και ού $T(W_i) \subseteq W_i$ για $i=1, 2$.

Έστω $e_1, \dots, e_p$ βάση του W_1 και $e_{p+1}, \dots, e_n$ βάση του W_2 .

Η (*) μας λέει ού $e = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ βάση του V .

Θέτουμε $T_1 = T|_{W_1} : W_1 \rightarrow W_1$, $T_2 = T|_{W_2} : W_2 \rightarrow W_2$

Φανερά T_1, T_2 γραμμικές, αφού T γραμμική.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ

$$[T]_e = \begin{bmatrix} [T_1]_{e_1 \dots e_p}^{e_1 \dots e_p} & 0_{p \times (n-p)} \\ 0_{(n-p) \times p} & [T_2]_{e_{p+1} \dots e_n}^{e_{p+1} \dots e_n} \end{bmatrix}$$

$\uparrow$

Block ΔΙΑΓΩΝΙΟΣ

Αποδ $T|_W$ άπειρη

Ορισμός $T: V \rightarrow V$ γραμμ. και W υποχώρος του V , ο W λέγεται αναλλοίωτος με προς T αν $T(w) \in W$

Πιο γενικά υποθέτουμε $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_s$

ώστε $(*) T(W_i) \subseteq W_i$ για $i=1, 2, \dots, s$

Θέτουμε για $i=1, 2, \dots, s$ $T_i = T|_{W_i} : W_i \rightarrow W_i$ και g_i βάση του W_i

Θέτουμε $e =$ τα στοιχεία της βάσης της g_1 και $g_2, \dots$ τα στοιχεία της βάσης g_s .

Τότε λόγω $(*)$ e βάση του V και

$$[T]_e^e = \begin{bmatrix} [T_1]_{g_1}^{g_1} & & 0 \\ & [T_2]_{g_2}^{g_2} & \\ 0 & & \ddots [T_s]_{g_s}^{g_s} \end{bmatrix}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Πάινει ο μηδενικός υποχώρος και όλο το V είναι αναλλοίωτος. Η καλύτερη περίπτωση είναι ο V να είναι εφδσ άθροισμα 1-διαστάτων T αναλλοίωτων υποχώρων. Αυτό φυσικά είναι ισοδύναμο με T διαγωνίσιμος

ΟΡΙΣΜΟΣ/ ΠΡΟΤΑΣΗ (ΣΥΖΥΓΗΣ ΑΝΕΙΚΟΝΙΣΗ)

Έστω $(V, \langle \rangle) \times \in \Gamma$ πεπερ διάστασης, και $T: V \rightarrow V$ γραμμική

Τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $S: V \rightarrow V$ ώστε $\langle T(u_1), u_2 \rangle = \langle u_1, S(u_2) \rangle$ για κάθε $u_1, u_2 \in V$

Η S λέγεται ΣΥΖΥΓΗΣ της T ως προς το $\langle \rangle$ και συμβολίγο $S = T^*$

Αρα $\langle T(u_1), u_2 \rangle = \langle u_1, T^*(u_2) \rangle$ για κάθε $u_1, u_2 \in V$

Αποδ Μοναδικότητα Έστω $S, S': V \rightarrow V$ γραμμ με

$$\langle T(u_1), u_2 \rangle = \langle u_1, S(u_2) \rangle = \langle u_1, S'(u_2) \rangle \quad \forall u_1, u_2 \in V$$

Αρα αφαιρώντας $0_{\mathbb{R}} = \langle u_1, S(u_2) \rangle - \langle u_1, S'(u_2) \rangle \Rightarrow$

$\forall u, u_2 \in V$. Έστω $u_2 \in V$
 Θετούμε $u_1 = S(u_2) - S'(u_2)$ (I) $\Rightarrow \langle S(u_2) - S'(u_2), S(u_2) - S'(u_2) \rangle = 0_{\mathbb{R}}$

$$\Rightarrow S(u_2) = S'(u_2)$$

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ T^*

Έστω $e_1, \dots, e_n$ ορθοκανονική βάση του V

Ορίζουμε $T^*: V \rightarrow V$

$$T^*(w) = \langle w, T(e_1) \rangle e_1 + \langle w, T(e_2) \rangle e_2 + \dots + \langle w, T(e_n) \rangle e_n$$

Αφού $\langle \rangle$ διγραμμική, εύκολα βλέπουμε T^* γραμμική.

> Έστω $u, u_2 \in V$ Θα δ.ο. $\langle T(u), u_2 \rangle = \langle u, T^*(u_2) \rangle$

Από

Υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ με $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Τότε

$$\langle T(u), u_2 \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \lambda_i T(e_i), u_2 \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle T(e_i), u_2 \rangle$$

$$\text{Επιπλέον } \langle u, T^*(u_2) \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \langle u_2, T(e_j) \rangle e_j \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \langle u_2, T(e_j) \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle u_2, T(e_i) \rangle$$

και το αποτέλεσμα έπεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Έστω $(\mathbb{R}^3, \langle \rangle)$ με το κανονικό Ε.Γ και

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ με } T(x_1, x_2, x_3) = (0, x_1, x_2)$$

Θα υπολογίσουμε την συζυγή $T^*: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Έστω $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \langle (x_1, x_2, x_3), T^*(y_1, y_2, y_3) \rangle &= \langle T(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = \langle (0, x_1, x_2), (y_1, y_2, y_3) \rangle \\ &= x_1 y_2 + x_2 y_3 = \langle (x_1, x_2, x_3), (y_2, y_3, 0) \rangle \end{aligned}$$

Άρα ισχύει $T^*(y_1, y_2, y_3) = (y_2, y_3, 0)$

4 ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΚΛΑΣΕΙΣ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΙ Δηλ A αντιστρέψιμος και $A^{-1} = A^t$

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΙ $A^t = A$

ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΙ $A^t = -A$

NORMAL $A^t A = A A^t$

Αν A ορθογώνιος ή συμμετρικός ή αντισυμμετρικός

~~ΚΑΙ~~ τότε A NORMAL

~~ΑΧ~~

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Χ.Ε.Γ ΠΕΠΕΓ. ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ

$T: V \rightarrow V$ (γραμμική)

4 ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΚΛΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ T .

T 1-1, επί και $T^{-1} = T^*$

$T^* = T$

$T^* = -T$

~~XXXX~~ NORMAL $T^* \circ T = T \circ T^*$

ΘΕΩΡΗΜΑ $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Χ.Ε.Γ ΠΕΠΕΓ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ $T: V \rightarrow V$

γραμμική Τ.Α.Ε.Ι

i) T γραμμική Ισομετρία

ii) T 1-1, επί και $T^{-1} = T^*$

Από i) = ii) T γραμμ. Ισομ. $\Rightarrow T$ 1-1, επί, και $\langle T(u_1), T(u_2) \rangle$

$= \langle u_1, u_2 \rangle \quad \forall u_1, u_2$

$\langle u_1, T^*(T(u_2)) \rangle$ Αφαιρώντας $\langle u_1, u_2 - (T^* \circ T)(u_2) \rangle = 0$

$\forall u_1, u_2$ άρα για $u_1 = u_2 - (T^* \circ T)(u_2) \Rightarrow u_1 = 0$

$\Rightarrow T^* \circ T = \text{id}_V$ ομοίως $T \circ T^* = \text{id}_V$

ii) $\Rightarrow$ i) Έστω $u_1, u_2 \in V$. Τότε

$\langle T(u_1), T(u_2) \rangle = \langle u_1, T^*(T(u_2)) \rangle = \langle u_1, (T^* \circ T)(u_2) \rangle$

$= \langle u_1, \text{id}_V(u_2) \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$

ΕΚΤΟΣ

Θεώρημα (χωρίς Απόδειξη)

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Χ.Ε.Γ πεπερ διαστάσεως $T: V \rightarrow V$
γραμμική. Υποθέτουμε T Normal (ως προς το $\langle \cdot, \cdot \rangle$)

δηλ ότι $T^* \circ T = T \circ T^*$

Τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση e του V ώστε

$$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} B_1 & & 0 \\ & B_2 & \\ 0 & & B_s \end{bmatrix}$$

και κάθε B_i 1×1 ή 2×2 και αν B_i 2×2 υπάρχει

$r_i \in \mathbb{R}$ και $\phi_i \in [0, \pi]$ ώστε $B_i = \begin{bmatrix} r_i \cos \phi_i & r_i \sin \phi_i \\ -r_i \sin \phi_i & r_i \cos \phi_i \end{bmatrix} =$

$$B_i = r_i \begin{bmatrix} \cos \phi_i & -\sin \phi_i \\ \sin \phi_i & \cos \phi_i \end{bmatrix}$$

Αυτο για $r_i = 0$ ή σταθερή απεικόνιση με τιμή 0.
 $r_i = 1$ στροφή.

Γενικά

